

# THE BEAUTY OF FRACTALS

traduction François PASCAL, 1989

Du milieu de la page 4 au milieu de la page 19

## Les frontières du chaos

«Là où le monde cesse d'être la scène de nos désirs et de nos espoirs personnels, là où en tant qu'être libres, nous regardons avec étonnement pour l'interroger et le contempler, là nous pénétrons la réalité de la science et de l'art.

Si nous décrivons ce que nous regardons et expérimentons dans le langage de la logique, nous faisons de la science;

Si nous le montrons sous des formes dont les relations ne sont pas accessibles à notre pensée consciente mais sont reconnues intuitivement comme porteuses de sens, nous faisons de l'art.

Commune aux deux est la dévotion à quelque chose au-delà du subjectif, chassé de l'arbitraire.»

A.EINSTEIN

«Mon travail a toujours tenté d'unir le vrai et le beau, et quand j'ai eu à choisir entre l'un et l'autre, j'ai habituellement choisi le beau.»

H.WEYL

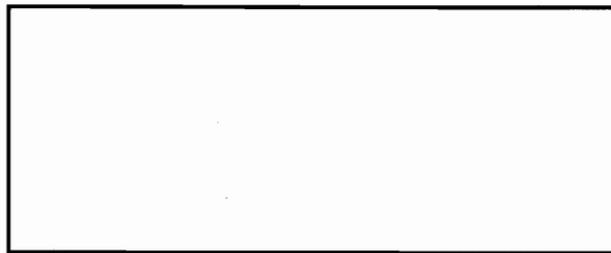
Nos images sont parties prenantes de cette tradition. Elles parlent du chaos et de l'ordre, et de leur compétition ou de leur coexistence; elles montrent les transitions entre l'un et l'autre et combien la région de transition est magnifique et complexe.

Et bien que la beauté des images réside dans ces régions, elles (les images) sont aussi un essai de compréhension de la question primordiale de l'influence de paramètres sur la structure de ces régions. Ceci nous conduit à d'autres frontières à d'autres niveaux et révèle des régularités que personne n'aurait imaginé il y a quelques années.

Les processus choisis ici proviennent de problèmes physiques et mathématiques variés, qui ont tous en commun la compétition de plusieurs centres pour la domination de plan. Le résultat est rarement une frontière simple entre les territoires. Au contraire il y a un enchevêtrement sans fin en filigrane et un combat incessant pour la moindre surface. C'est dans la région frontalière que la transition d'une forme à une autre prend forme: de l'ordre au chaos, de l'état magnétisé à l'état non-magnétisé. Quels qu'ils soient, les entités qui se rencontrent à la frontière ont à être interprétées. Les régions frontalières sont plus ou moins engrenées selon les conditions qui régissent

le processus en question. Occasionnellement, un troisième compétiteur profite de la dispute des deux autres et établit sa propre zone d'influence. Il peut arriver qu'un seul centre domine tout le plan, mais il y a encore des limites à son pouvoir, sous forme de points isolés qui ne sont pas soumis à son action; ce sont des dissidents, pour ainsi dire, qui ne veulent appartenir à personne.

Les images représentent des processus qui, bien sûr, sont des simplifications de la réalité. Elles exagèrent certains aspects pour mieux les mettre en évidence. Par exemple, aucune structure réelle ne peut être agrandie un nombre infini de fois et toujours ressembler à elle-même. Le principe d'auto-similarité est cependant approximativement réalisé dans la nature: dans le tracé des côtes et des rivières, dans la formation des nuages, dans les arbres, dans les flux turbulents des liquides, dans l'organisation hiérarchique des êtres vivants... Ce fut Benoit Mandelbrot qui ouvrit nos yeux sur la «géométrie fractale de la nature». Actuellement, les processus qui génèrent de telles structures ont été étudiés depuis un bon moment en mathématique et en physique. Ce sont de simples processus rétroactifs, dans lesquels une même opération est effectuée avec répétition, le résultat d'une itération devenant le point de départ de la suivante:



La seule règle ici étant que la relation entre l'antécédent et l'image ne soit pas linéaire, c'est-à-dire que la loi dynamique  $f(x_n)=x_{n+1}$  doit être plus qu'une simple proportionnalité  $x_{n+1}=kx_n$ . Le schéma indique que la loi  $x \rightarrow f(x)$  dépendra d'un paramètre  $C$ , dont l'influence sera discutée ultérieurement.

Si nous démarrons ce type de processus itératif avec un  $x_0$  choisit arbitrairement, il générera une séquence de valeurs  $x_1, x_2, x_3, \dots$  dont le comportement sur de longues périodes d'itérations est notre propos. La séquence tendra-t-elle vers une valeur limite particulière  $X$  et finir par y rester ? Va-t-elle aboutir à un cycle de valeurs qui se répète encore et toujours ? Ou la séquence est-elle indéfiniment erratique, déterminée par la loi dynamique et la valeur initiale, mais toujours imprévisible ?

Des processus de ce type sont découverts dans toutes les sciences exactes. En fait la description des phénomènes par des équations différentielles, introduite par Sir Isaac Newton et Gottfried W. Leibniz il y a 300 ans, est basée sur un principe rétroactif. La loi dynamique détermine la position et la vitesse d'une particule à un instant donné à partir de leur valeur à l'instant précédent. Le mouvement d'une particule est compris comme étant le déroulement de cette loi. Il n'est pas essentiel que le processus soit discret -qu'il se déroule par palier- ou qu'il soit continu. Les physiciens aiment penser en terme d'intervalles de temps infinitésimaux: *natura non facit saltus*; les biologistes, à l'inverse, préfèrent souvent observer les changements d'année en année ou de génération en génération. Manifestement, les deux points de vue sont possibles, et ce sont les circonstances qui stipulent quelle description est appropriée.

## Le scénario de la divergence vers le chaos.

Considérons un exemple. La croissance d'une population sur une période donnée est usuellement décrite en termes de taux de croissance, c'est à dire d'accroissement annuel de la population relatif à sa taille totale. S'il est constant au cours des ans, la loi de croissance est dite linéaire et la croissance est dite exponentielle. A un taux de croissance de 5%, par exemple, la population double tous les 14 ans. Ces types de lois, cependant, s'appliquent à des périodes de temps limitées. Il y a toujours des limites à la croissance.

L'un des premiers à avoir noté cela fut P.F. Verhulst qui en 1845 formula une loi incluant la limitation de croissance. Il affirma qu'une niche écologique donnée peut uniquement supporter une population maximale  $X$  et que le taux de croissance devrait chuter lorsque la taille de la population se rapproche de  $X$ . En disant ceci, il fut amené à émettre le postulat d'un taux de croissance variable. Ainsi le processus devient non-linéaire, avec des conséquences massives sur son comportement dynamique.

Il fallut plus de 100 ans pour que les complications qui s'ensuivent soient complètement explorées. Pour de faibles taux de croissance, assurément, rien de bien spectaculaire ne survient. La taille de la population est simplement régulée de façon à rester à sa valeur optimale  $X$ , augmentant lorsqu'elle est située en-dessous, régressant lorsqu'elle la dépasse. C'est lorsque le taux de croissance dépasse les 200% que nous sommes bons pour les surprises.

Trouvons-nous des taux de croissance aussi important, dans le monde réel ? Bien sûr la population humaine ne s'accroît pas si rapidement, mais pour certains insectes ce n'est pas inhabituel. Ce qui est important, c'est que dans les 20 dernières années, la loi de Verhulst a trouvé des applications dans un bien plus grand nombre de phénomènes qu'il n'avait prévu initialement. Edward N. Lorenz, un météorologiste du MIT, a découvert en 1963 que précisément cette loi décrit certains aspects des flux turbulents, particulièrement là où les taux sont élevés. Depuis lors, des travaux théoriques sur la physique des lasers, l'hydrodynamique et la cinétique des réactions chimiques ont montré le caractère paradigmatique de cette loi, et les scénarios qu'elle prédit ont été retrouvés lors des expérimentations.

Comment se comporte donc le processus de Verhulst lorsque le taux de croissance devient important ? Une description détaillée est donnée dans la section I de ce livre.

Contentons-nous ici de mentionner les plus importantes découvertes. A des valeurs de paramètres de croissance légèrement supérieur à 200 %, la taille optimale ne peut plus être atteinte. La croissance vigoureuse de petites populations conduit invariablement à un dépassement suivi par une contraction opposée dans laquelle la population diminue jusqu'à des tailles bien en dessous de la valeur  $X$ . Après quelques temps, une oscillation régulière s'établit entre deux valeurs, une trop grande et l'autre trop petite (voire Fig. 18).

Lorsque le paramètre de croissance passe à des valeurs supérieures à 245 %, des comportements plus compliqués apparaissent. Les oscillations impliquent 4, puis 8, puis 16 différentes tailles, et ainsi de suite, jusqu'à ce que, pour des paramètres supérieurs à 275 %, le chaos s'établisse.

Que signifions-nous par chaos ? En termes simples, le système est passé hors de tout contrôle. Il n'y a pas moyen de prédire son comportement à long termes. Les croissances et les chutes des population, sur la Fig. 20, persistent sans jamais s'assagir en une séquence ordonnée d'évènements.

Pour apprécier la surprise que ressenti Lorenz lors de sa découverte, rappelez-vous qu'il n'y a pas de hasard en cause. Le processus est toujours totalement décrit par la loi de Verhulst, la séquence est DETERMINEE par sa valeur initiale, et cependant elle ne peut être prédite qu'en la laissant suivre son cours !

Cette situation très subtile nécessite quelques explications de plus. Dire que la

séquence est déterminée par sa valeur initiale laisse présumer que cette dernière peut être spécifiée avec une précision infinie. Ce n'est vrai qu'en principe. N'importe quelle description réelle de la taille initiale, sa spécification dans un ordinateur par exemple, ne peut être donnée qu'avec une précision finie. Le processus peut être interprété comme le déroulement d'une information: plus nous l'observons longuement, mieux nous connaissons, rétrospectivement, la valeur exacte de la valeur initiale.

L'aspect le plus excitant des dynamiques de Verhulst n'est pas le chaos en tant que tel, cependant, mais le scénario par lequel l'ordre tourne au chaos. Il pourrait sembler qu'il ne vaille guère la peine de déterminer les paramètres de croissance exactes auxquels les oscillations bifurquent d'une période  $2^n$  à une période  $2^{n+1}$ . Qui s'en enquêterait ? Mais le perfectionnisme a souvent été la source d'importantes découvertes. Johannes Kepler n'aurait pas découvert la forme elliptique des orbites planétaires s'il n'avait été distrait par la faible déviation de l'orbite de Mars de 8 minutes d'arc par rapport à la théorie de Ptolémée. Friedrich Wilhelm Bessel n'aurait pas été capable de déterminer la distance du soleil aux étoiles les plus proches s'il n'avait appris le plus juste usage des nombres et des tables durant son apprentissage chez un marchand à Brême. Le travail scientifique dépend toujours de l'attention la plus scrupuleuse aux détails même lorsque les aspects qualitatifs ont été éclaircis. Il n'y a pas de meilleur outil pour cela qu'un ordinateur, comme le sait toute personne qui a eu un jour ou l'autre à démasquer les erreurs d'un programme.

Une analyse exacte des points de bifurcation dans le processus de Verhulst révèle une loi de tout premier ordre dans le monde des phénomènes non-linéaires. Cela concerne la longueur des intervalles de valeurs de paramètres à l'intérieur desquels une période particulière est stable. Les intervalles sont plus courts, à chaque doublement de période, d'un facteur qui approche une valeur UNIVERSELLE

$$d=4,669\ 201\ 660\ 910\dots$$

lorsque la période tend vers l'infini.

Ce nombre, dont les premières décimales furent rapportées pour la première fois en 1977 par Grobmann et Thomae, apparaît encore et encore pour une multitude d'autres processus. Il est aussi caractéristique des scénarios de doublement de périodes que le nombre  $p$  l'est de la relation de la circonférence au diamètre d'un cercle. Ce nombre est maintenant appelé «nombre de Feigenbaum». Mitchell Feigenbaum réalisa des calculs sur beaucoup de processus différents sur son ordinateur de bureau à Los Alamos, et aboutit toujours au même facteur. Il découvrit l'universalité de ce nombre.

Cette découverte a généré une intense activité parmi les scientifiques de nombreux domaines. Un grand nombre d'expériences ont été réalisées montrant que le scénario de doublement de la période survient en fait dans de nombreux systèmes naturels: soit qu'il s'agisse du départ des turbulences dans les fluides, soit des oscillations non-linéaires dans les réseaux chimiques ou électriques ou même de la transition du rythme cardiaque normal à la fibrillation mortelle, nous ne pouvons simplement pas énumérer tous les groupes de recherche, aux USA, en France, en Allemagne et partout ailleurs, qui ont démontré que des aspects essentiels des dynamiques des systèmes complexes peuvent être réduits à ce comportement illustré par l'équation de Verhulst. L'impact sur la théorie n'en sont pas moins impressionnant. Les mathématiciens sont encore en train d'essayer de comprendre pleinement cette universalité inattendue. Mais, et c'est peut-être le plus important,

cela a mis sur orbite un espoir général que les phénomènes non-linéaires puisse être à la portée de la classification scientifique systématique. Le biologiste Robert M. May fut l'un des premiers à reconnaître l'importance que revêt l'étude des processus de Verhulst. Dès 1976 il écrivait:

«- Je voudrais dès à présent exhorter afin que les gens soit familiarisés avec l'équation de Verhulst très tôt dans leur éducation mathématique. Cette équation peut être étudiée phénoménologiquement en l'itérant sur une calculette ou même à la main. Son étude n'implique pas une sophistication conceptuelle aussi poussée que le calcul différentiel. Une telle étude enrichirait grandement l'intuition de l'étudiant à propos des systèmes non-linéaires. Pas seulement dans la recherche, mais aussi dans le monde quotidien de la politique et de l'économie, nous nous porterions tous mieux si plus de gens réalisaient que des systèmes (non-linéaires) simples ne possèdent pas nécessairement des propriétés dynamiques simples»

### Escarmouches frontalières: le chaos tiré de la compétition

La signification du scénario de la bifurcation est devenu essentiel pour notre compréhension des phénomènes non-linéaires. Les analyses du processus de Verhulst firent de l'idée de chaos déterministe un sujet de conversation, et révéla de façon élémentaire quelques aspects universels des processus dynamiques complexes. Cette universalité ne doit pas être mal interprétée. Il existe, bien évidemment, d'autres voies pour le chaos; en fait d'autres scénarios à caractères également général ont été mis à jour. La notion d'universalité reflète pour une part une tendance des physiciens et des mathématiciens à s'approprier des mots qui paraissent importants. Ce que nous voulons dire, c'est qu'un certain comportement est typique et plus ou moins étonnamment retrouvé dans toute une gamme de systèmes.

Il est maintenant souhaitable d'identifier les principes qui expliquent les concordances entre des scénarii individuels. Benoit B Mandelbrot l'a réalisé en 1980 quand il a découvert l'ensemble dont le nom lui rend hommage. Ce n'est pas simplement une figure bizarre que les uns trouvent mignonne et les autres laide; l'ensemble de Mandelbrot personnalise un principe de transition de l'ordre au chaos plus général que l'universalité de Feigenbaum. Ce charme esthétique est associé à une signification fondamentale, comme c'est souvent le cas en mathématiques.

Le génie de Mandelbrot fut de s'intéresser à des nombres complexes au lieu de nombres réels, pour suivre le processus  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \dots$  sur un plan plutôt que sur une ligne. Le lecteur qui n'est pas familiarisé avec les nombres complexes ne doit pas se sentir perdu dans ce qui suit; il suffit juste d'imaginer que la loi  $x_n \rightarrow f(x_n)$  donne la position où le point  $x_n$  est censé aller dans le plan, et non plus sur une ligne. Les détails de la loi ne sont pas essentiels, parceque nous verrons que des lois différentes peuvent conduire au même ensemble de Mandelbrot. Ce qui est plus important est que la transition de l'ordre au chaos est décrite d'un point de vue plus général. Notre vision s'est défocalisée de la nature des frontières entre les régions. Nous pouvons penser en terme de centres -les attracteurs- qui sont en compétition pour étendre leur influence sur le plan: un point initial  $x_0$  est conduit par le processus vers un centre ou l'autre, ou encore il se trouve à la frontière et ne peut se décider. Si le paramètre est changé, les régions appartenant aux centres se modifient, et avec elles les frontières. Il peut arriver que la frontière tombe en poussière, et ce cas constitue un des scénarii les plus importants.

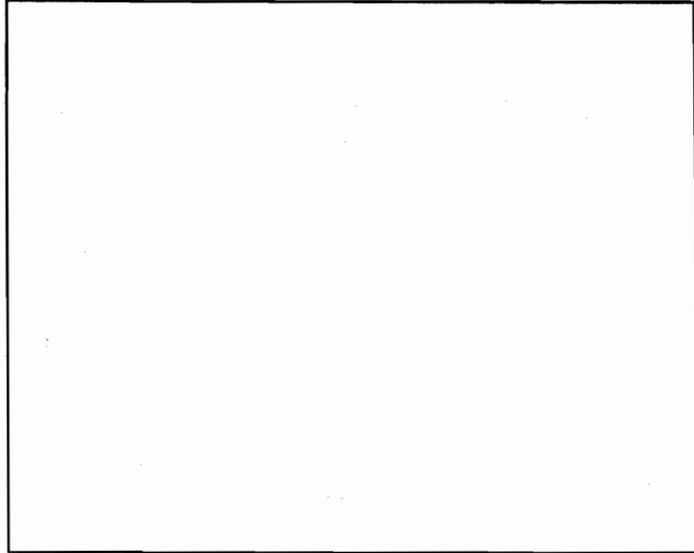


Fig.2 L'ensemble de Mandelbrot pour le processus  $x \rightarrow x^2 + C$ . Le plan complexe est montré pour les valeurs réelles de  $C$  comprises entre  $-2.4$  et  $0.8$ , et pour les valeurs imaginaires de  $C$  comprises entre  $-1.2$  et  $1.2$ .

Le processus de Mandelbrot est mathématiquement semblable à celui de Verhulst: sa formule est:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 + C$$

Prendre un nombre  $x_0$ , l'élever au carré, et ajouter une constante  $C$ , pour obtenir  $x_1$ , puis répéter l'opération sur  $x_1$  pour obtenir  $x_2, x_3$  et ainsi de suite. Tout le monde peut faire cela, mais personne n'espère trouver tant de beauté énigmatique cachée dans une équation si banale.

Commençons avec le plus simple choix possible de la constante  $C$ , à savoir  $C=0$ . Alors ne faisons qu'élever au carré le nombre à chaque itération:

$$x_0 \rightarrow x_0^2 \rightarrow x_0^4 \rightarrow x_0^8 \dots$$

Il y a alors trois types de séquences, trois scénarii possibles, en fonction de  $x_0$ :

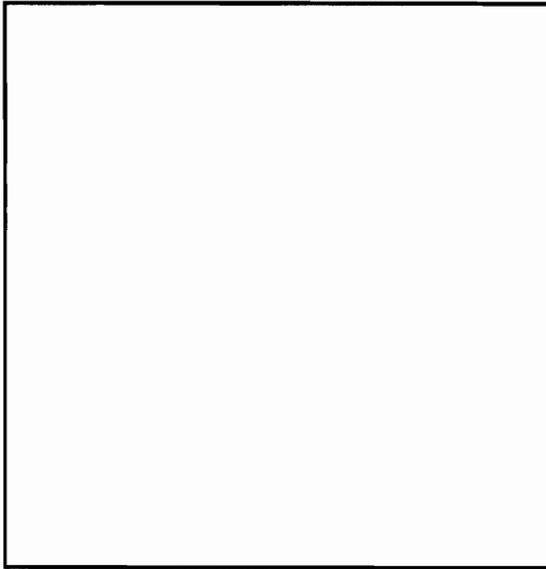
1/ Les nombres deviennent de plus en plus petits, leur séquence se rapproche de zéro? Nous dirons que zéro est un *attracteur* pour le processus  $x \rightarrow x^2$ . Ce sont les points situés à une distance inférieure à 1 de cet attracteur (le point zéro, centre du plan, NdT.) qui sont ainsi précipités vers lui.

2/ Les nombres deviennent de plus en plus grands et tendent à prendre des valeurs infinies. Nous dirons que l'infini est également un attracteur pour ce processus. Tous les points situés à une distance supérieure à 1 s'y précipitent.

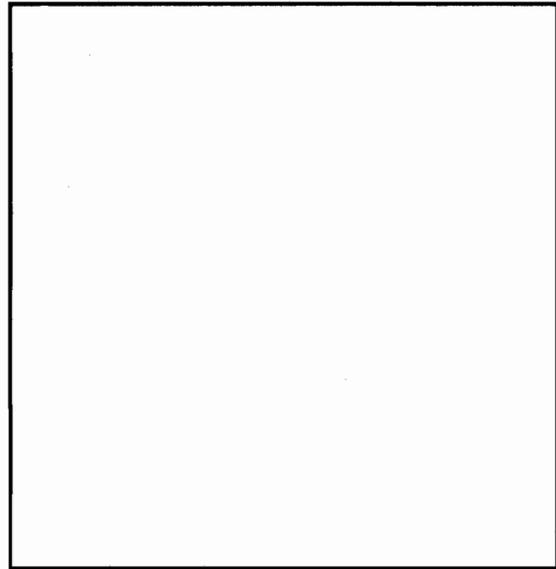
3/ Les points sont à une distance de 1 du zéro et restent là. Leur séquence s'accroche à la frontière entre les deux domaines d'attraction, constitués dans le cas présent par le cercle unitaire de centre zéro.

La situation est claire: Deux zones d'influence se partagent le plan, et la frontière qui les sépare est un simple cercle.

La surprise vient lorsque nous choisissons une autre valeur que 0 pour  $C$ , disons par exemple  $C = -0.12375 + 0.56508i$ . Ici également, la séquence  $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \dots$  a le choix entre les trois possibilités énumérées ci-dessus, mais l'attracteur interne (le point



*Fig.3 Bassin d'un attracteur ponctuel fixe*

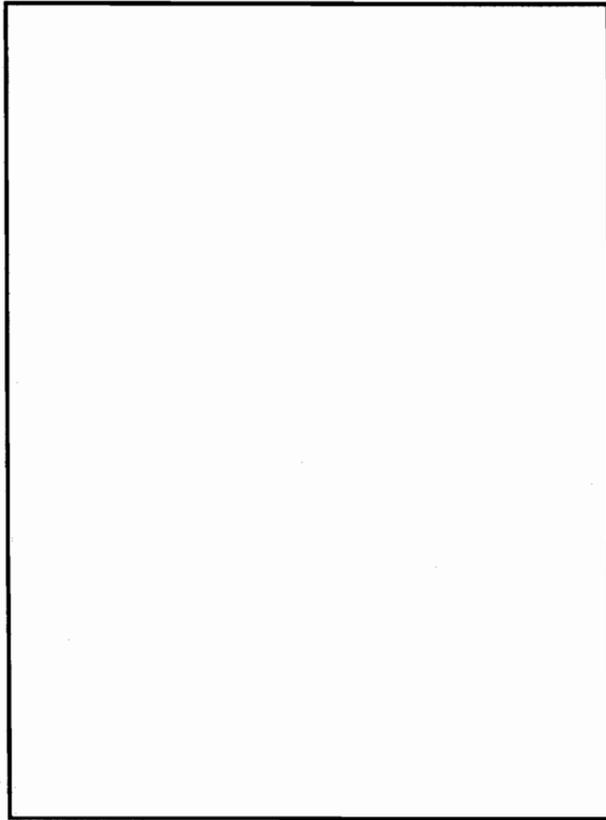


*Fig.4 Bassin d'un attracteur cyclique de période 3*

de la Fig.3) n'est plus zéro, et la frontière n'est plus lisse. La figure 3 montre la ligne frippée de la frontière. Et si nous prenions une loupe pour regarder la frontière, nous verrions qu'elle est tout-à-fait aussi frippée à la loupe, qu'à l'oeil nu. C'est ce que Mandelbrot appelle la *structure fractale* d'une telle frontière. Cela rappelle des lignes cotières et toutes ces très nombreuses frontières naturelles qui apparemment deviennent plus longues lorsque nous utilisons un outil de mesure plus petit. Un des aspects particuliers de la frontière est son auto-similarité: Si nous jetons un coup d'oeil sur un coin ou une baie quelconque, nous constatons que la même forme se retrouve à un autre endroit à une autre échelle. Des frontières de ce type sont connues en mathématiques sous le terme d'ensemble de Julia.

Pendant la 1<sup>ère</sup> guerre mondiale, les mathématiciens Gaston Julia et Claude Fatou ont étudié leurs propriétés dans le cas plus général de représentation rationnelle du plan complexe (voir la section 2 de ce livre). Leur travail fascinant est resté largement inconnu, même de la plupart des mathématiciens, car sans les ordinateurs graphiques modernes, il était presque impossible de communiquer son essence profonde. L'auto-similarité, par exemple, était bien connue de Julia et Fatou qui établirent que la frontière peut être générée à partir d'une petite portion choisie au hasard, par un nombre fini d'itérations de la formule  $x \rightarrow x^2 + C$  (voir 2.8). Mais combien est-ce plus facile de comprendre cette caractéristique en regardant les images 3,4,6 à 15, plutôt que de réfléchir sur la signification de cette propriété.

Une autre caractéristique des ensembles de Julia est qu'ils portent en eux une dynamique incroyablement compliquée. A la frontière, le processus est aussi chaotique que possible. La fig.3, statique, ne peut le montrer, la planche 20 donne un aperçu furtif tout au mieux. L'ensemble de Julia contient le point fixe stable de la représentation de  $x \rightarrow x^2 + C$  ainsi que tous ses antécédents; il contient un nombre infini de séquences chaotiques instables, également avec leurs antécédents, et par



*Fig.5 Relation entre l'ensemble de Mandelbrot et le scénario de doublement de période qui a lieu si  $C$  varie sur l'axe des réels. Les bifurcations correspondent aux point de bourgeonnement; les fenêtres périodiques interrompant les plages chaotiques correspondent aux petites copies de l'ensemble de Mandelbrot sur son antenne principale.*

dessus tout Il contient des séquences chaotiques de points qui n'approchent jamais aucune sorte de régularité. Cela ne peut s'apprécier pleinement qu'«in vivo», lorsque l'ordinateur réalise l'image. Ou encore l'on peut traduire l'image en son et suivre l'effet subjectif de cette «musique»: un effet fascinant, appelé *Intermittence*, a lieu lorsque le processus arrive dans le voisinage d'un point périodique; le même thème se répète plus ou moins fréquemment et quand finalement il se brise, l'oreille perçoit une tension particulière. L'effet visuel correspondant est loin d'être aussi saisissant.

Si nous prenons une autre valeur de  $C$ , par exemple  $C = -0.12 + 0.74i$ , nous obtenons la figure 4. Ici l'ensemble de Julia n'est plus un cercle déformé unique mais consiste en une infinité de cercles déformés qui constituent toujours un ensemble continu. L'intérieur de cet ensemble n'est pas attiré par un seul point fixe, mais par une séquence cyclique de 3 points; marqués par trois points gras sur la figure.

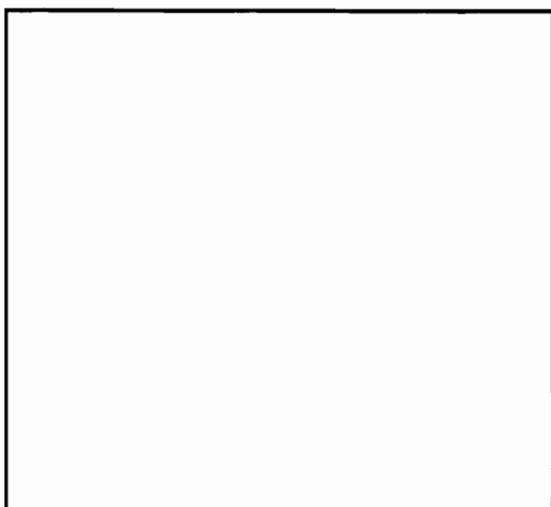
Il existe un moyen de savoir à quel type d'ensemble de Julia un choix donné de  $C$  aboutit. Cet outil est l'ensemble de Mandelbrot  $M$ . La figure 2 le montre en noir dans le plan complexe. Soit un nombre complexe  $C$  appartient à l'ensemble de  $M$  (en noir), soit il n'y appartient pas. Les ensembles de Julia correspondant (par le

processus  $x \rightarrow x^2 + C$ ) sont alors très différents. Ils ont des structures continues si  $C$  appartient à  $M$ , ou sont divisés en une multitude de pièces si  $C$  se trouve hors de cet ensemble. Par là même, la frontière de  $M$  est d'un intérêt particulier.

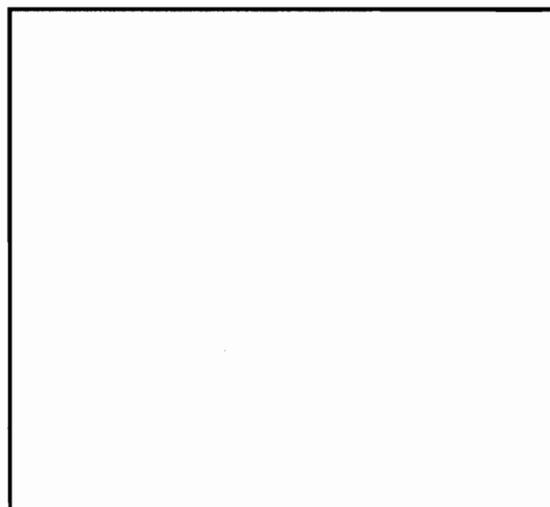
Imaginez un chemin dans le plan complexe, qui commencerait à l'intérieur de  $M$  et qui se terminerait à l'extérieur. Lorsque  $C$  varie le long de ce chemin, les ensembles de Julia correspondants subissent un changement qualitatif des plus dramatiques lorsque  $C$  va passer la frontière de  $M$ : comme s'ils explosaient, ils vont se décomposer en un nuage formé d'un nombre infini de points. En ce sens, à la frontière de  $M$  est localisé quelque sorte de transition de phase mathématique pour les ensembles de Julia de  $x \rightarrow x^2 + C$ .

Plus généralement, chacune des diverses parties de  $M$  définit une forme particulière pour les ensembles de Julia tirés des valeurs de  $C$  qui s'y trouvent. La partie principale en forme de coeur, par exemple, contient toutes les valeurs de  $C$  pour lesquelles l'ensemble de Julia est un cercle plus ou moins déformé entourant un domaine d'attraction d'un point fixe unique (Fig.3). Chaque bourgeon de  $M$  correspond à un attracteur cyclique d'une période particulière, selon un schéma qui est bien connu maintenant. La valeur de  $C$  de la Fig.4 est le centre du gros bulbe sur le dessus du corps principal de  $M$ . Le triple cercle est engendré par la trifurcation d'un point unique au moment précis où le paramètre  $C$  passe du corps principal au bulbe. Le scénario de Verhulst de doublement de la périodicité a lieu sur l'axe des réels. La période 2 est stable dans le gros bourgeon incluant les  $C$  dont la partie réelle est comprise entre -1.25 et -0.75, et connecté à sa droite au corps principal de  $M$ . Le point  $C = -2$  est l'extrémité de l'antenne de  $M$  et correspond à la valeur  $r = 3$  du processus de Verhulst (Voir la section 1). La Fig.5 illustre cet concordance et montre clairement comment l'analyse faite dans le plan complexe par Benoit Mandelbrot donne une bien meilleure image que celle réalisée dans l'ensemble des réels par Verhulst.

A quoi ressemble l'ensemble de Julia lorsque  $C$  est un point de  $M$  où un bourgeon s'attache au corps principal ? Un exemple est donné Fig. 6.



*Fig.6 Bassin parabolique autour d'un attracteur ponctuel fixe.*



*Fig.7 Disques de Siegel autour d'un point fixe et ses antécédents*

La valeur  $C = -0.481762 - 0.531657i$  correspond au point de germination d'un bourgeon à 5 points cycliques stables. Les 5 points de ce cycle naissent du point épais de la Fig.6 lorsque  $C$  arrive dans le bourgeon. Au point d'embranchement, l'ensemble de Julia passe dans un nouvel attracteur marginal. Ceci porte le nom de «cas parabolique» de la dynamique. Les Fig.8 et 9 sont d'autres exemples de ce type d'ensemble de Julia.

En dehors des points de germination des bourgeons, l'ensemble de Mandelbrot a d'autres types de points limites. Quand  $C = -0.39054 - 0.58679i$ , nous obtenons la Fig. 7, où le point fixe est également marginalement stable. Contrairement au cas parabolique, la frontière ne s'étend pas jusqu'au point fixe, mais les séquences dynamiques ne l'atteignent jamais non-plus. Les cercles dessinés autour sont des cercles Invariants, c'est-à-dire que si l'on prend un point initial sur un de ces cercles, toutes les itérations donneront également des points appartenant à ce cercle. A l'intérieur de la région délimitée par l'ensemble de Julia, le processus peut être décrit de la façon suivante: d'abord les points apparaissent dans les plus petits bourgeons périphériques, passent dans d'autres de plus en plus grands, jusqu'à ce qu'ils arrivent dans le disque contenant le point fixe. Le disque est appelé disque de Siegel d'après le mathématicien Carl Ludwig Siegel. Une fois qu'un point est arrivé là, il tourne simplement autour du point fixe sur son cercle invariant.

Avec ces 4 exemples, nous avons énuméré les cas typiques où la frontière produite par le processus  $x \rightarrow x^2 + C$  définit une région intérieure. En résumé:

- si  $C$  est pris dans le corps principal de  $M$ , un cercle fractalement déformé entoure un point attracteur fixe (Fig.3);

- si  $C$  est pris dans un des bourgeons, alors l'ensemble de Julia consiste en une infinité de cercles fractalement déformés, qui entourent les points d'un attracteur périodique et leurs antécédants (Fig. 4, 10);

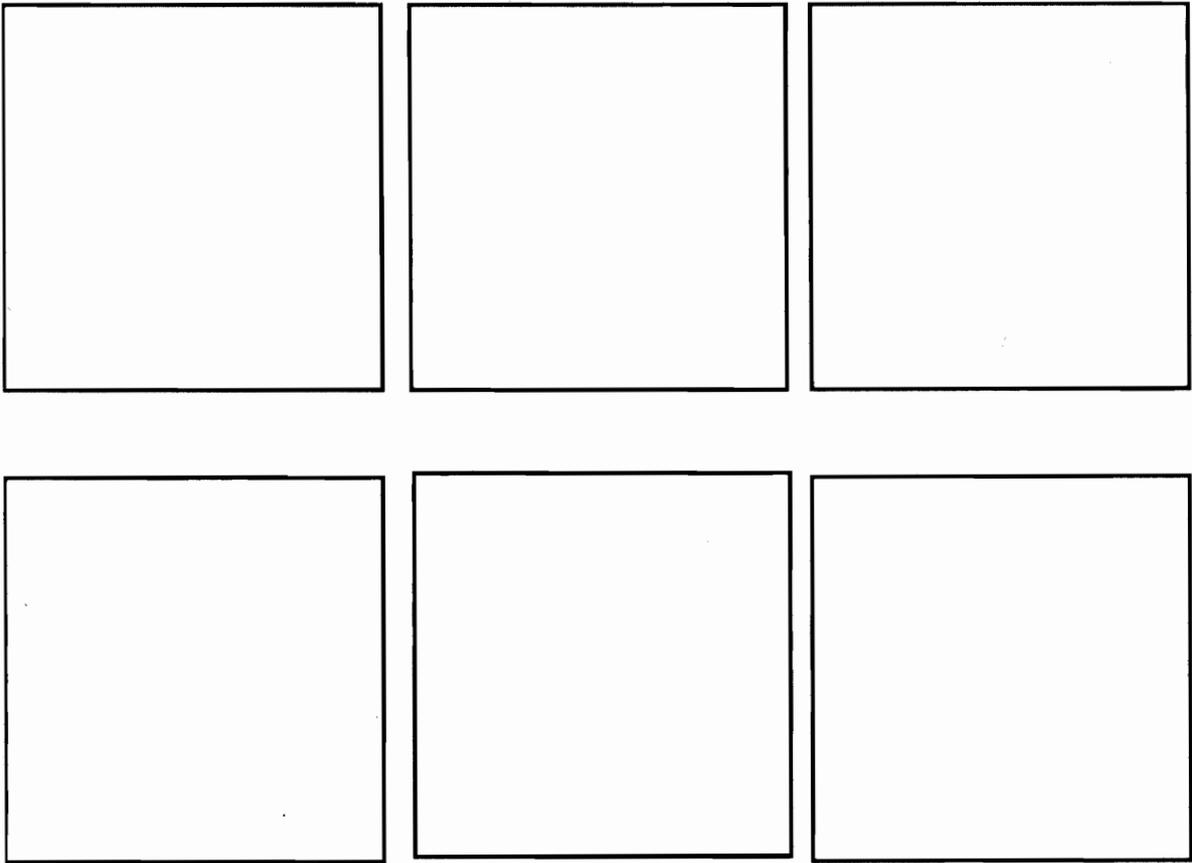
- si  $C$  est un point de germination d'un bourgeon, nous sommes dans le cas parabolique: la frontière émet des prolongements qui atteignent l'attracteur marginale stable (Fig. 6, 8, 9);

- si  $C$  est un autre point de la frontière du corps principal cardioïde ou d'un bourgeon (il y a quelques conditions techniques concernant la partie réelle du point) nous avons un disque de Siegel (Fig.7).

Dans un travail de mathématique fondamentale en 1983, Dennis Sullivan a montré que les quatre cas précédents décrivent toutes les structures caractéristiques possibles qu'une région d'un ensemble de Julia puisse offrir. Une cinquième possibilité, appelée *anneaux de Herman*, ne se réalise pas dans le cas  $x \rightarrow x^2 + C$ . Bien qu'il ait été prouvé qu'elle a lieu dans d'autres cas, elle n'a jamais été observée (voir Section 3).

Dans les cartes 18,20 et 24 les couleurs ont été utilisées pour mettre en évidence la structure interne du domaine d'attraction (et du disque de Siegel dans les cartes 22 et 25). La carte 20 montre le cas d'un point fixe en plus de l'attracteur infini. La gradation des couleurs rend compte du nombre d'itérations de  $x \rightarrow x^2 + C$  qui sont nécessaires au point correspondant pour atteindre un petit disque d'un certain diamètre autour du point fixe.

Une même couleur signifie donc une même distance dynamique du centre d'attraction. Ainsi dans la région extérieure, la coloration quantifie l'échappement vers l'infini, alors que l'intérieur est coloré selon la course des dynamiques menant à

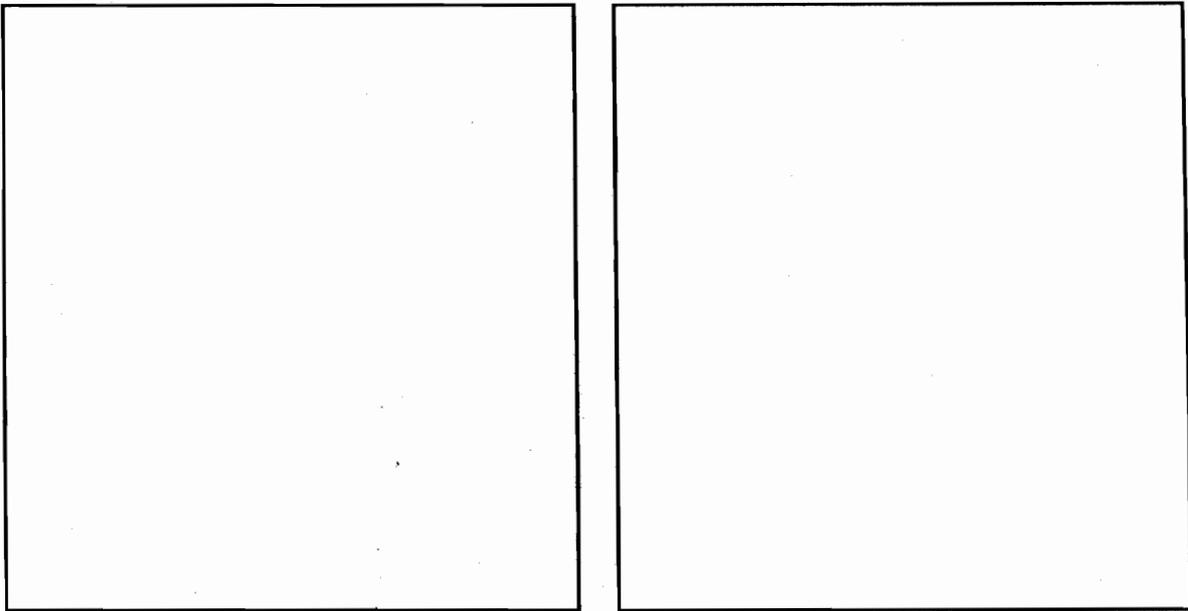


*Fig. 8-13. Ensembles de Julia typiques, utilisant le processus  $x \rightarrow x^2+C$*

- Fig. 8 Cas parabolique.*
- Fig.9 Cas parabolique,  $C = -1.25$ ; pour  $C > -1.25$ , attracteur cyclique de période 20;  $C < -1.25$ , attracteur cyclique de période 4.*
- Fig. 10 Ensemble de Julia continu (avec un attracteur cyclique de période 3) juste avant qu'il ne se désagrège en une poussière de Cantor.*
- Fig.11 Poussière de Fatou*
- Fig. 12 Dendrite,  $C=i$ .*
- Fig.13 Ensemble de Cantor en partant de la Fig.10 et en modifiant légèrement la valeur du paramètre  $C$ .*

des valeurs finies. La carte 24 montre un attracteur cyclique à trois points, la carte 11 un cycle de période 11. Dans le cas des disques de Siegel (carte 22), les courbes de niveaux sont superposés aux cercles invariants.

Ces exemples ne sont en aucun cas une liste exhaustive des structures possibles pour les ensembles de Julia; il y a d'autres valeurs possibles pour le paramètre  $C$ . Comme le montre la figure, l'ensemble de Mandelbrot est entouré d'antennes frisées, plus ou moins branchues, comme une chevelure hirsute. Si nous tirons  $C$  d'une de ces antennes, nous obtenons un ensemble de Julia formé similairement. La Fig. 12 montre l'exemple de  $C=i$ . De telles dendrites n'ont pas d'intérieur; il n'y a pas



*Fig. 14 Dendrite perlée (Ensemble de Julia pour une valeur de  $C$  issue d'un sous-ensemble de l'ensemble de Mandelbrot.*

*Fig.15 (à droite) Ensemble de Julia pour une valeur de  $C$  tirée de la vallée des hippocampes.*

d'autre attracteur que l'infini. L'ensemble de Julia est réduit à la frontière d'un unique domaine d'attraction, et contient les points qui ne sont pas soumis à cet attracteur. Aussi longtemps que  $C$  est pris dans  $M$ , l'ensemble de Julia possède une structure continue. Selon un théorème de Adrien Douady à Paris et de John Hamal à Cornell, l'ensemble de Mandelbrot aussi serait continu.

En regardant de près l'antenne de  $M$ , on peut voir qu'elle comporte des petites copies du plus grand ensemble. Elles se tiennent là que sur des brochettes, et plusieurs autres plus petites se trouvent entre les plus grosses, et ainsi de suite, et ainsi de suite à l'infini. Les plages avec attracteurs stables que l'on voit dans la région chaotique du processus de Verhulst correspondent à ces rejetons, comme le montre clairement la Fig.5. Si nous prenons  $C$  dans un de ces  $M$  miniatures, alors l'ensemble de Julia correspondant est une combinaison de dendrites et de l'ensemble de Julia obtenu pour une valeur de  $C$  de la partie principale de  $M$ , celui-ci copié et inséré dans les dendrites un nombre infini de fois. La figure 14 montre un exemple pour une valeur de  $C$  issue de l'ensemble de Mandelbrot de la carte 27.

Finalement, nous pouvons choisir des valeurs de  $C$  à l'extérieur de  $M$ . Comme dans le cas de la structure purement dendritique, l'infini est le seul attracteur, mais maintenant l'ensemble de Julia s'est dissout en un ensemble de points appelé *poussière de Fatou*. Cette poussière devient de plus en plus fine lorsqu'on s'éloigne de  $M$  pour choisir  $C$ . Si  $C$  est choisi proche de la frontière de  $M$ , la poussière dessine des figures fascinantes telles que celles des Fig.11, 13 et 5, toujours fractales, autosimilaires, et détenant une dynamique chaotique.

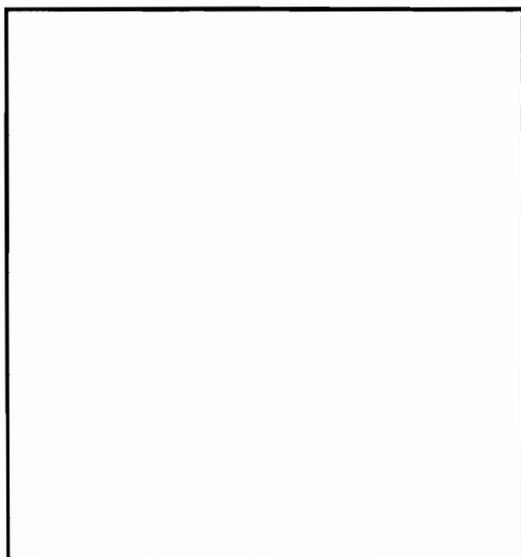
### La morphologie des frontières complexes.

Si la diversité des frontières de Julia semblent étonnantes, combien plus incompréhensibles seraient-elles sans l'ensemble de Mandelbrot ! Ce guide à travers le monde des paramètres nous indique quel type de frontière nous devons attendre pour une valeur donnée de  $C$ . Ceci rend la frontière de  $M$  particulièrement intéressante, dans la mesure où elle marque un changement dans la nature des ensembles de Julia. A la limite de l'ensemble de Mandelbrot, les ensembles de Julia perdent leur continuité, explosent et retombent en poussière.

Un nombre considérable de nos images proviennent de cette bordure. Nous découvrons là un monde fantastique, dont la richesse en forme contraste presque d'une façon grotesque avec la simplicité de la formule  $x \rightarrow x^2 + C$ . Mais n'est-ce pas une observation bien connue, que la diversité fleurit particulièrement bien là où sont des frontières ? Les contours clairs sont des exceptions qui naît de principes opposés. Chaque conflit révèle des milliers d'autres plus petits. Dans ce sens, la forme générale de la bordure correspond à des structures similaires à des échelles de plus en plus petites.

Le saut qualitatif à la limite de l'ensemble de Mandelbrot influence la région proche. Une simple coloration noir et blanc ne le dévoilerait pas (si par exemple le noir est utilisé pour les points qui donnent un ensemble de Julia continu et le blanc pour ceux qui donnent un ensemble de Julia éclaté). La structure complexe de la région ne peut être dévoilée de façon adéquate qu'avec l'aide de graphiques colorés. Même les 256 couleurs disponibles pour nos images ne peuvent que difficilement esquisser la dynamique; il faut des expérimentations interactives avec le terminal graphique pour en arracher la vraie complexité.

Comment obtenons-nous les couleurs du voisinage de  $M$  ? Imaginez qu'il soit fait de métal, chargé électriquement. La surface possède un potentiel constant, disons 10000 volts. Ce potentiel décroît dans les régions proches de la surface, et nous traçons les lignes de tensions égales, appelées lignes équipotentielles (Fig.16). La ligne de 1 volt, par exemple, est si éloignée du conducteur, qu'elle est presque cir-



*Fig. 16 Ensemble de Mandelbrot chargé , lignes équipotentielles et lignes de champ.*

culaire, parcequ'à cette distance, M ressemble beaucoup à une charge électrique ponctuelle. La ligne de potentiel 900 volts, au contraire, donne quelques indices de la forme de M, et la ligne 999 volts épouse assez fidèlement les contours de M. Notre coloration suit ces lignes: les points situés entre deux de ces lignes ont tous la même couleur. les variations de couleurs donnent une carte du potentiel électrostatique entre la frontière de M et l'infini.

Maintenant, qu'est-ce que ces lignes équipotentielles ont à voir avec les dynamiques du processus  $x \rightarrow x^2 + C$  ? En 1983, A. Douady et J. Hubbard ont prouvé le fait mathématique étonnant qui est que les lignes équipotentielles mettent précisément en évidence les dynamiques du point critique  $x=0$ . Les lignes équipotentielles sont également les lignes équitemporelles d'échappement vers l'infini pour le point  $x_0 = 0$  (voir la section spéciale 4). Cette relation entre les images électrostatiques et les dynamiques suggère une voie simple pour déterminer les lignes de contours sur ordinateur. Les valeurs de C pour lesquelles le point critique  $x_0$  à besoin d'un nombre donné d'itération pour sortir d'un cercle de rayon 1000 définissent une bande d'une couleur donnée entre deux lignes équipotentielles. Quand nous approchons de la frontière de M, le nombre d'itération nécessaire devient plus grand, la dynamique est trappée pour des temps de plus en plus longs dans les chemins tortueux de la région frontalière de M.

Les planches en couleurs 26 à 54 et 99 à 101 montrent ainsi des portions de M agrandies (les petites figures noir et blanc servent à localiser les différentes planches sur le pourtour de M). Il est difficile de croire en la multitude des structures contenues dans la simple formule  $x \rightarrow x^2 + C$ . Peut-il y avoir une démonstration plus parlante de l'énorme complexité cachée dans les lois les plus simples ?

Contemplant maintenant les images et notons quelques observations. Il apparaît que chaque portion de M définit des motifs. Si nous errons le long de la frontière, nous observons une métamorphose graduelle de ces motifs, par exemple démarquant avec la crosse de la planche 30 et accumulant de plus en plus de bras tortueux pour aboutir au cheval de mer qui émerge de la planche 36. A n'importe quel endroit, le motif est repris sous un nombre infini de variations. Ceci est mis en évidence dans la série d'agrandissements successifs de «la vallée des hippocampes», planches 34 à 50, qui, même après un agrandissement de facteur 1 000 000, montre encore de nouvelles constellations de queues et d'yeux d'hippocampes.

Une autre caractéristique remarquable est la similarité de structure d'un détail de l'ensemble de Mandelbrot avec un ensemble de Julia correspondant. L'ensemble de Julia de la figure 15 est celui d'une valeur de C prise dans l'enroulement de la queue du cheval de mer de la planche 42. La similarité qualitative des formes est à couper le souffle. Cela va si loin que le nombre de spirales qui sont issues des yeux est de 29 dans les deux cas.

Il y a une constante, dans la diversité des motifs de ces ensembles: l'ensemble de Mandelbrot lui-même, qui apparaît encore et encore à différentes échelles mais toujours de la même forme. Ceci n'est pas sans rappeler l'organisation génétique des organismes évolués: chaque cellule contient le génome complet, mais à chaque endroit de l'organisme, juste une petite part de ce génome est exprimé.

Nous avons mentionné précédemment qu'il a été prouvé que M est continu. Aucune part de M n'est détachée du corps principal, mais tout est raccordé ensemble par des lignes extrêmement fines. Les planches 58 à 60 nous intriguent à cet égard au plus au point. Le menu détail au bord de M, montré ici en trois colorations différentes, donne une idée de l'ahurissant système de passerelles nécessaires pour assurer la connexion.

Le lecteur est invité à prendre part à ces images. Nous nous excusons si notre

propre interprétation semble trop fantaisiste. Naturellement nous sommes soumis à un résultat qui, en tant que résultat scientifique, a demandé de nombreuses heures de calcul par ordinateur, et qui en tant que composition polychromatique ne demande pas qu'un petit effort de notre part ! Nous croyons cependant que notre fascination provient avant tout des conséquences profondes, de la fantastique phénoménologie de ces frontières complexes qui appellent tant à une communion esthétique. Nous devons admettre qu'il y a quelque chose de pas naturel dans ces images. La profondeur microscopique infinie vers laquelle l'autosimilarité semble se perpétuer est une construction mathématique qui n'existe pas dans le monde réel. Les objets physiques sont rarement similaires sur plus de quatre niveaux d'agrandissement. En biologie, un nouveau schéma d'auto-organisation s'applique généralement sur deux niveaux d'agrandissement (les macromolécules ont un diamètre d'environ 100 atomes, les cellules ont un diamètre d'à peu près cent macromolécules, etc...). Par suite, le processus  $x \rightarrow x^2 + C$  n'est pas une description correcte du monde réel. Mais nous n'avons jamais affirmé que si ! Chaque loi a son domaine d'application qui doit être exploré et précisé. Le domaine de validité des lois linéaires n'est plus suffisant, au moins en physique; il est donc maintenant nécessaire de trouver comment les lois non-linéaires peuvent nous aider à comprendre l'univers. Dans cette optique, l'étude de la loi quadratique  $x \rightarrow x^2 + C$  a un sens fondamental. La découverte de Mandelbrot de l'image universelle  $M$  est sans aucun doute un événement de grande conséquence pour la théorie des systèmes dynamiques.

### Les frontières complexes de Newton

Sir Isaac Newton a posé les fondations de la mécanique classique, de l'optique, et du calcul. Mais en plus de ces bases de la science, il a établi un bon nombre de méthodes moins connues qui se sont révélées utiles pour le temps présent. En fait, le dénommé "algorithme de Newton" qui permet de trouver les racines d'une équation  $f(x)=0$  est plus utilisée que jamais, maintenant que les ordinateurs peuvent appliquer la méthode avec bien plus de facilité et de précision que les humains. Un certain nombre d'images dans cet album célèbrent cette méthode.

L'algorithme de Newton est une astuce ingénieuse. Il transforme le problème de la résolution de l'équation  $f(x)=0$  en un processus dynamique où les solutions se battent pour s'arracher une proposition de départ. Il n'est pas nécessaire de connaître une solution pour démarrer. Quand on propose une solution de départ, la recette de Newton nous rapproche un peu d'une des solutions. Elles agissent comme le centre d'un champ d'attraction (un des thèmes favoris de Newton !). (Ainsi partant d'une valeur quelconque, l'algorithme va nous amener par itérations successives à une solution exacte)

Jusqu'où s'étend le champ d'attraction des divers centres, et à quoi ressemblent les frontières entre eux? Lord Arthur Cayley, en 1879, fut le premier à poser la question sérieusement; et accessoirement, il a dû renoncer, parcequ'il trouva la réponse trop compliquée. Les détails de l'analyse de Cayley et des développements ultérieurs sont présentés dans la section spéciale 6. Il suffit ici de mentionner que le problème pris en main par Cayley fut la pierre d'angle au dessus de laquelle Julia et Fatou élaborèrent leur magnifique théorie des itérations pour les fonctions rationnelles dans le plan complexe.

Il y a un aspect des ensembles de Julia que nous n'avons pas mentionné, bien qu'il engendre un charme tout à fait particulier à des exemples tels que les représentations magnétiques des planches Map 6 et Map 10. Peu importe combien

d'attracteurs sont distribués sur le plan, chaque point de l'ensemble de Julia touche simultanément chacun de leur domaines d'attraction. Dans le cas de trois attracteurs, chaque point de la bordure est le lieu de rencontre des trois domaines! Cela semble impossible, mais la planète de la planche Map 75 montre comment cela fonctionne. Les domaines d'influence des racines de l'équation polynomiale, telles que définies par l'algorithme de Newton, sont colorés l'un en jaune, l'autre en gris, le troisième en bleu. Partout où deux régions sont sur le point de former une frontière (bleu et jaune, par exemple), la troisième région (grise) établit une chaîne d'avant-poste. De manière à ce que ces avant-postes ne forment pas de frontières bilatérales avec leurs voisins, ceux-ci sont à leur tour encerclés de chapelets d'îlots selon une structure qui se répète à l'infini dans des dimensions de plus en plus infimes. La petite lune sur la planche 75 a été introduite pour montrer la face cachée de la planète. La planche 76 montre la même planète dans d'autres couleurs. Ici la structure frontalière complexe est réhaussée dans la région centrale par un reflet clair.

Ce qui peut paraître impossible, une frontière entre trois pays, peut être étendue sans difficulté mathématique à 4,5,6... domaines d'attraction.. La frontière est alors faite uniquement de points où 4,5,6... domaines se rencontrent. La planche 61 montre le pôle d'une planète dont les quatre domaines forment une frontière de points quadruples. Les lunes grises, ajoutées arbitrairement, n'ont que trois domaines.

Les planches 90-98 montrent pas à pas le résultat d'un autre type d'animation. La planche 90 répète la structure des planches 75 et 76, avec des frontières faites de points triples. La figure 98, de son côté, est plus proche des planches 61-63, dont les frontières sont formées de points quadruples. La séquence montre comment notre planète artificielle fabrique de nouveaux continents, passant doucement d'un système triple à un système quadratique. Le pourcentage indique à quel point du processus nous en sommes.